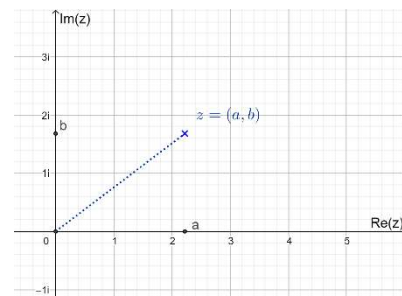


Komplexe Zahlen

Betrachtung verschiedener Darstellungsformen

? Weitere Eigenschaften komplexer Zahlen

Im Folgenden werden wir weitere Eigenschaften einer komplexen Zahl $z = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ kennenlernen, indem wir die Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene verwenden.



- a) Bestimmen Sie die Länge des Zeigers einer komplexen Zahl. In der Gaußschen Zahlenebene wird dies als **Betrag** bezeichnet.

Das **Argument** einer komplexen Zahl $\arg(z)$ ist der gerichtete Winkel zwischen der reellen Achse und dem Ortsvektor des Punktes z in der komplexen Ebene.

- b) Bestimmen Sie mit obiger Definition das Argument $\arg(z) := \phi$ einer komplexen Zahl.

? Die Polarform komplexer Zahlen

Beweisen Sie folgende Aussage: Jede komplexe Zahl lässt sich (neben der algebraischen Form) in Polarform angeben, d.h. es gilt: $z = a + ib = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$

? Darstellungsformen komplexer Zahlen

Betrachten Sie in dem Applet die beiden Darstellungsformen sowie die Rechenoperationen von komplexen Zahlen. Welche Vor- und Nachteile können Sie jeweils für die Darstellung der komplexen Zahlen in der algebraischen Form und in der Polarform ausfindig machen?

? Komplexe Zahlen und Matrizen?!

Man kann die komplexen Zahlen auch mithilfe von Matrizen darstellen. Hierfür werden die reelle Einheit 1 durch die Einheitsmatrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und die imaginäre Einheit i durch die Matrix $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $I^2 = -E$ dargestellt.

Analog zur algebraischen Darstellung einer komplexen Zahl $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt in der Matrixdarstellung einer komplexen Zahl $Z \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: $\text{Re}(Z) = a$, $\text{Im}(Z) = b$.

- a) Finden Sie mithilfe der obigen Informationen die Matrixdarstellung einer komplexen Zahl $Z = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$ mit $Z \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ heraus.
- b) Analog zur Polarform der komplexen Zahl lässt sich auch die Matrixdarstellung umformen. Zeige mithilfe der Polarform $z = a + ib = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$, dass die Matrixdarstellung einer komplexen Zahl Z auch folgendermaßen aussehen kann:

$$Z = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

- c) Wir betrachten nun speziell die Multiplikation einer komplexen Zahl in der gaußschen Zahlenebene: Beschreiben Sie, welche Abbildung zu den Matrizen gehört, wenn man sie wie in (b) darstellt.